NOTIZEN

Über eine nichtstationäre Meßmethode für die Wärmeleitkonstante von Gasen

Von L. Waldmann

Institut für Theoretische Physik der Universität Erlangen-Nürnberg, Erlangen

(Z. Naturforschg. 18 a, 1360—1361 [1963]; eingeg. am 10. Dezember 1963)

Langsame Druckänderung an einem adiabatisch eingeschlossenen Gas hat eine räumlich gleichmäßige Temperaturänderung in ihm zur Folge. Die Druckänderung kann bewirkt werden durch Verschieben eines Kolbens oder durch Öffnen eines Hahns zu einem Gefäß, in dem zunächst ein anderer Druck herrscht. Die Bedingung der Langsamkeit ist in der gewöhnlichen Versuchspraxis nicht einschneidend; sie besagt z. B. nur, daß die Kolbengeschwindigkeit klein sein muß im Vergleich zur Schallgeschwindigkeit.

Ist das Gas von isothermer Wand umgeben — was besser zu realisieren ist als der adiabatische Teil —, so bildet sich bei Druckänderung infolge Wärmeleitung zur Wand ein räumlich inhomogenes Temperaturgebirge aus, das allmählich wieder in die konstante, durch die Wand vorgegebene Temperatur übergeht, nachdem der Druck unveränderlich geworden ist. Der raum-zeitliche Temperaturverlauf wird abhängen vom zeitlichen Druckverlauf, von der Geometrie des Gefäßes, den thermodynamischen Eigenschaften des Gases und von dessen Wärmeleitfähigkeit. Es ist möglich, aus solchem Versuch die letztere zu ermitteln, wenn lediglich der thermische Ausdehnungskoeffizient des Gases bekannt ist.

Um das darzutun, sei zunächst der Energiesatz für ein kompressibles strömendes Medium notiert. Er lautet

$$\varrho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+v_\mu\frac{\partial u}{\partial x_\mu}\right)=-\frac{\partial q_\mu}{\partial x_\mu}-p_{\mu\nu}\frac{\partial v_\mu}{\partial x_\nu}. \tag{1}$$

Hier bezeichnen t die Zeit, x_μ die Ortskoordinaten ($\mu, \nu = 1, 2, 3$; Summationsvorschrift). Ferner sind $\varrho=\varrho(T,P)$ die Dichte, $u=u(T,P)$ die innere Energie pro Masseneinheit, q_μ der Wärmestrom, $p_{\mu\nu}$ der Drucktensor, v_μ die Strömungsgeschwindigkeit; T bezeichnet die thermodynamische Temperatur, P den thermodynamischen Druck. All diese Größen sind Funktionen von Ort und Zeit. Für den Wärmestrom q_μ wird der übliche Ansatz zugrunde gelegt

$$q_\mu=-\lambda\frac{\partial T}{\partial x_\mu} \tag{2}$$

mit der Wärmeleitfähigkeit $\lambda=\lambda(T,P)$. Den Ansatz für den Drucktensor brauchen wir nicht zu notieren. — Durch Einführen der Enthalpie pro Masseneinheit

$$i=u+P\,\varrho^{-1}$$

und Benutzen der Kontinuitätsgleichung geht (1) über in

$$\varrho\left(\frac{\partial i}{\partial t}+v_\mu\frac{\partial i}{\partial x_\mu}\right)=\frac{\partial P}{\partial t}+v_\mu\frac{\partial P}{\partial x_\mu}-\frac{\partial q_\mu}{\partial x_\mu}+Q_\mathrm{R}, \tag{3}$$

wobei $\quad Q_\mathrm{R}=(P\,\delta_{\mu\nu}-p_{\mu\nu})\,\dfrac{\partial v_\mu}{\partial x_\nu}$

die Reibungswärme bedeutet.

Bei Strömungsgeschwindigkeiten weit unter Schallgeschwindigkeit ist die Reibungswärme vernachlässigbar und der Druck praktisch ortsunabhängig, $P=P(t)$, so daß sich (3) vereinfacht zu

$$\varrho\left(\frac{\partial i}{\partial t}+v_\mu\frac{\partial i}{\partial x_\mu}\right)=\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}-\frac{\partial q_\mu}{\partial x_\mu}. \tag{4}$$

Die Enthalpiedichteänderungen $\varrho\,\delta i$, welche bei dem uns interessierenden Versuch entstehen, werden — falls klein — proportional sein den aufgeprägten Druckänderungen δP. Auftretende Strömungsgeschwindigkeiten v (Massenverlagerung) werden selbst wieder den Änderungen δi proportional sein, so daß das Glied $v_\mu\,\partial i/\partial x_\mu$ quadratisch in δP ist und für eine lineare Analyse weggelassen werden kann (keine Konvektion). Dasselbe gilt für die durch Schwerkraft hervorgerufene Konvektion. [Die Gravitation kommt in (1) nicht vor; sie wirkt nur mittelbar auf u ein, durch die von ihr bewirkte Strömung.] Und schließlich ist dann konsequenterweise auch die Wärmeleitfähigkeit als zeit- und ortsunabhängige Größe zu behandeln. Somit vereinfacht sich, unter Benutzung von (2), Gl. (4) zu

$$\varrho\frac{\partial i}{\partial t}=\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}+\lambda\,\Delta T. \tag{5}$$

Gemessen wird die Temperatur. Deshalb ist die Enthalpiedichte noch zu eliminieren. Das geschieht mittels der Zerlegung

$$\mathrm{d}i=c_\mathrm{P}\,\mathrm{d}T+\left(\frac{\partial i}{\partial P}\right)_\mathrm{T}\mathrm{d}P,$$

wo c_P die spezifische Wärme bezeichnet, und mittels der thermodynamischen Beziehung

$$\varrho\left(\frac{\partial i}{\partial P}\right)_\mathrm{T}=\varrho^{-1}\left(\frac{\partial\varrho\,T}{\partial T}\right)_\mathrm{P}=1-\alpha\,T,$$

wo $\quad \alpha=-\varrho^{-1}\left(\dfrac{\partial\varrho}{\partial T}\right)_\mathrm{P} \qquad (6)$

den thermischen Ausdehnungskoeffizienten bedeutet. Damit erhält (5) die gewünschte Gestalt

$$\varrho\,c_\mathrm{P}\frac{\partial T}{\partial t}=\alpha\,T\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}+\lambda\,\Delta T. \tag{7}$$

Alle Koeffizienten neben den Differentialquotienten sind bei unserer linearen Analyse als raum-zeitlich konstant zu betrachten. Beim idealen Gas ist $\alpha\,T=1$.

Diese Gleichung, ergänzt durch Randbedingungen, bestimmt die lokale Temperatur in dem Medium, wenn sich der Druck in bekannter Weise und relativ wenig ändert. Bei adiabatischen Wänden gibt es eine ortsunabhängige Lösung $T(t)$. Beim idealen Gas ist

$$\varrho\, c_P = \frac{\varkappa}{\varkappa - 1} P\, T^{-1}, \quad \varkappa = c_P/c_V .$$

Somit lautet hier die wohlbekannte ortsunabhängige Lösung — sogar für große Druckänderungen gültig —

$$T(t)/T(0) = [P(t)/P(0)]^{1-1/\varkappa} .$$

Bei isothermer Wand (Wandtemperatur T_0) hingegen ist die Wärmeleitung maßgebend beteiligt und den raum-zeitlichen Temperaturverlauf zu berechnen bei gegebenem $P(t)$, ist im allgemeinen recht umständlich. Dazu kommt, daß bei der Messung mit dem Widerstandsthermometer oder dem Thermoelement der Galvanometerausschlag den Temperatur-Zeit-Verlauf mehr oder weniger verzerrt wiedergibt. Beide Schwierigkeiten sind umgangen — das ist der Kernpunkt des Verfahrens —, wenn man statt der Temperatur selbst ihr Zeitintegral

$$\Phi(\boldsymbol{r}) = \int_{-\infty}^{\infty} [T(t, \boldsymbol{r}) - T_0]\, \mathrm{d}t \tag{8}$$

betrachtet. Da $T(-\infty, \boldsymbol{r}) = T(\infty, \boldsymbol{r}) = T_0$ ist, verschwindet bei Integration von (7) über die Zeit die linke Seite und im ersten Term rechts erscheint die totale Druckänderung

$$\delta P = P(\infty) - P(-\infty) . \tag{9}$$

So entsteht für das Temperaturzeitintegral eine POISSONsche Differentialgleichung mit räumlich konstantem Quellenterm

$$\Delta\Phi = -\alpha\, T\, \delta P/\lambda . \tag{10}$$

Dazu tritt die Randbedingung $\Phi_{\text{Rand}} = 0$. Die Einzelheiten des Druck-Zeit-Verlaufes sind demnach ohne Einfluß auf Φ; es kommt nur auf δP allein an.

Die Gl. (10) ist viel einfacher als Gl. (7). Sie wurde für praktisch wichtige Anordnungen bereits vor Jahren gelöst, anläßlich der Bestimmung des Thermodiffusionsfaktors aus den bei der Diffusion auftretenden Temperaturdifferenzen [1]. Ferner ist wie damals anwendbar die Bemerkung, daß das Temperaturzeitintegral dem Zeitintegral des Galvanometerausschlages exakt proportional ist [2]. Die Schwingungsgleichung der Galvanometerspule (φ = Ablenkwinkel)

$$a \frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} + b \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} + c\,\varphi = C(T - T_0)$$

ergibt durch Integration über die Zeit sogleich

$$c \int_{-\infty}^{\infty} \varphi\, \mathrm{d}t = C\, \Phi .$$

Auf das Trägheitsmoment a und die Dämpfung b der Spule kommt es nicht an. Lediglich die Konstante c/C muß durch Eichung bekannt sein, um Φ aus dem zeitintegrierten Ausschlag zu erhalten.

Somit kann man an Hand von Gl. (10) bei bekanntem thermischen Ausdehnungskoeffizienten die Wärmeleitfähigkeit ermitteln aus der gemessenen totalen Druckänderung und dem gemessenen Temperaturzeitintegral. Der Druckverlauf im einzelnen braucht nicht bekannt zu sein. Das Verfahren dürfte frei sein von Schwierigkeiten durch Konvektion, wie oben begründet, und anwendbar bei hohen und niedrigen Temperaturen und Drucken. Versuche zur Erprobung sind im Max-Planck-Institut für Chemie im Gange.

1 L. WALDMANN, Z. Phys. **124**, 175 [1944].

2 L. WALDMANN, Z. Phys. **124**, 2 [1944].

Doppelsondenmessungen mit Hilfe eines Mikrowellenübertragers

Von H. HERMANSDORFER und G. HOFMANN

Institut für Plasmaphysik GmbH, Garching b. München

(Z. Naturforschg. **18 a**, 1361—1363 [1963]; eingeg. am 9. November 1963)

Zur erdfreien Messung des Sondenstromes von „schwimmenden" Doppelsonden erwies sich ein Mikrowellenübertrager als gut geeignet. Dabei wird die von einer mit dem Sondenstrom modulierten Kristalldiode reflektierte Leistung gemessen. Erdfrei wird der Sondenkreis durch die Luftstrecke zwischen zwei Antennen. Diese Methode weist gegenüber Trenntransformatoren eine höhere Zeitauflösung ($4 \cdot 10^{-8}$ sec) und geringere Störempfindlichkeit auf. Als Meßbeispiel wird die Sondenregistrierung des Ionisationsvorläufers (Precursor) einer konischen z-Pinchentladung gezeigt.

An anderer Stelle wurde bereits über eine Sondenmethode berichtet, mit der unter Umständen auch in schnell veränderlichen, dichten und heißen Plasmen Ionendichte und -drift bestimmt werden können [1]. Im wesentlichen wird zwischen zwei Sondenelektroden eine genügend kleine Spannung angelegt. Der Sondenstrom ist dann bei geeignetem Aufbau des Kreises proportional $n_i\, T_e^{-1/2}$ (n_i = Ionendichte, T_e = Elektronentemperatur, keine Ionendrift).

Eine große Schwierigkeit bei dieser, wie auch bei anderen Doppelsondenmethoden ist die erdfreie Messung des Sondenstromes. Das Sondenkreispotential soll dem Potential des Plasmas am Ort der Sonde folgen können, also durch die Messung nicht wesentlich beeinflußt werden („schwimmende" Doppelsonde). In Abb. 1 ist der vereinfachte Sondenkreis dargestellt, wobei das Plasma durch seinen äquivalenten Widerstand

$$R_P = (\mathrm{d}V_s/\mathrm{d}I_s)_{V_s \to 0}$$

ersetzt ist.

1 G. HOFMANN, Z. Naturforschg. **18 a**, 309 [1963].